Hochschule
für Technik
Stuttgart

HFT Stuttgart
Fakultät für Vermessung, Informatik und Mathematik
Studiengang Mathematik
Unterrichtsmaterialien zum Schulfach IMP

Aussagenlogik

Einführung

In der Logik ist eine Aussage ein Satz, bei dem die Frage nach *wahr* oder *falsch* sinnvoll gestellt werden kann. So ist der Satz „Das Wetter ist schön." eine Aussage, während der Satz „Gib mir bitte etwas zum Trinken." keine Aussage ist. Nun kann man diese Aussagen individuell beurteilen. Manche Personen stimmen der Aussage „Das Wetter ist schön." zu, andere Personen finden das Wetter überhaupt nicht schön, verneinen diese Aussage.

Eine Aussage wird also entweder mit *wahr* oder *falsch* beurteilt, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. Wir bezeichnen Aussagen mit Großbuchstaben wie:

(1) A: „Das Wetter ist schön."

(2) B: „Lisa ist fleißig."

Einzelne einfache Aussagen können wir zu komplexeren Aussagen verknüpfen. Wir verknüpfen hier A und B wie folgt:

(3a) C: „Das Wetter ist schön **und** Lisa ist fleißig."

Diese Aussage kann man auch als aussagenlogische Formel schreiben:

(3b) C: $A \wedge B$

Man bezeichnet das Verknüpfungs-Zeichen $\wedge$ in Formel (3b) auch als logischen UND-Operator.

Entscheidend ist nun, dass man die Aussage C nicht unabhängig von A und B beurteilen kann. Hat eine Person die Aussagen A und B jeweils mit *wahr* beurteilt, so muss sie konsequenterweise auch die Aussage C mit *wahr* beurteilen. Der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage C hängt eindeutig von den Wahrheitswerten der einzelnen Aussagen A und B ab.

Nicht jede sprachliche Verknüpfung zweier einfacher Aussagen A und B ist für die Aussagenlogik geeignet. So ist als sprachliche Verknüpfung eine Beurteilung wie „A **weil** B" unbrauchbar, da alleine aus den Aussagen A und B die Ursache im Allgemeinen im Verborgenen bleibt. Zulässig sind daher nur solche Verknüpfungen, die für die zusammengesetzte Aussage einen eindeutigen Wahrheitswert garantieren. Die Wahrheitswerte von zulässigen zusammengesetzten Aussagen können wir übersichtlich in Wahrheitstabellen darstellen.

Wahrheitstabellen für verknüpfte Aussagen

In den Wahrheitstabellen sind den Aussagen A und B jeweils entweder der Buchstabe w für den Wahrheitswert *wahr* oder der Buchstabe f für den Wahrheitswert *falsch* zugeordnet. In der rechten Spalte jeder Wahrheitstabelle ist die Negation der Aussage A beziehungsweise die Verknüpfung der einzelnen Aussagen A und B mit den resultierenden Wahrheitswerten angegeben. In den Tabellenüberschriften sind die logischen Operationen wörtlich formuliert, unterhalb jeder Tabelle die zugehörigen aussagenlogischen Formeln.

„Nicht A“

A	$\neg A$
w	f
f	w

Negation

„A und B“

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Konjunktion

„A oder B“

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Adjunktion

„Entweder A oder B“

A	B	$A \oplus B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Kontravalenz

„Wenn A, dann B“

A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Implikation

„A genau dann, wenn B“

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Koimplikation

Die Implikation „Wenn A, dann B“ („Aus A folgt B“) bedarf noch einer näheren Erklärung. A ist eine hinreichende Bedingung für B. Das heißt, das Ereignis B tritt sicher ein, wenn A gilt. Umgekehrt ist B eine notwendige Bedingung für A. Nur wenn B überhaupt gilt, dann kann, muss aber nicht, A eintreten. Wir wollen dies mit einem Beispiel verdeutlichen.

A: „Heinz schwimmt im Wasser.“ B: „Heinz ist nass.“

C: $A \to B$ „Wenn Heinz im Wasser schwimmt, dann ist er (sicher) nass.“

D: $A \leftarrow B$ „(Nur) Wenn Heinz nass ist, dann kann es sein, dass er im Wasser schwimmt.“ Sicher ist, wenn er nicht nass ist, dann schwimmt er auch nicht im Wasser.

Wenn die Aussage A falsch ist, dann ist die Implikation $A \to B$ immer wahr. Sie ist nur falsch, wenn die Voraussetzung A wahr, aber B falsch ist.

Die Koimplikation $A \leftrightarrow B$ führt die hinreichende mit der notwendigen Bedingung zusammen. Man kann sie auch so formulieren: „Nur wenn A gilt, dann tritt sicher B ein und umgekehrt."

Mit Hilfe logischer Operatoren können wir beliebig komplexe Aussagen erzeugen und in der zugehörigen Wahrheitstabelle die resultierenden Werte darstellen. Eine Aussage, die stets wahr ist, nennt man **Tautologie**, eine Aussage, die stets falsch ist, eine **Kontradiktion**. Ein Beispiel für eine Tautologie ist: $C\colon A \rightarrow (B \oplus \neg B)$. Wir stellen die Wahrheitstabelle auf und zerlegen sie in einzelne logische Abschnitte:

Wahrheitstabelle für eine Tautologie

A	B	$\neg B$	$B \oplus \neg B$	$C\colon A \rightarrow (B \oplus \neg B)$
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w

Führen zwei logische Ausdrücke bei gleichen Eingabewerten zu den gleichen resultierenden Werten, dann sind sie logisch **äquivalent**. So sind die beiden Aussagen $C\colon A \rightarrow B$ und $D\colon \neg B \rightarrow \neg A$ logisch äquivalent. Wir können dann formulieren $C = D$, was man wiederum anhand der zugehörigen Wahrheitstabellen belegen kann:

A	B	$C\colon A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$D\colon \neg B \rightarrow \neg A$
w	w	f	f	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w

Am Anfang des Abschnitts sind in den Wahrheitstabellen übliche logische Operatoren dargestellt. Man kann einige von ihnen durch Verknüpfungen anderer ersetzen. So ist es beispielsweise möglich, alle logischen Operatoren alleine durch das logische **NAND** zu ersetzen. Der NAND -Operator $\uparrow$ ist definiert durch $A \uparrow B := \neg(A \wedge B)$. Man prüfe mit Hilfe von Wahrheitstabellen nach: $A \rightarrow B = A \uparrow (B \uparrow B)$.

Übungsblatt zur Aussagenlogik

Aufgabe 1

Gegeben sind die Aussagen:
A: „Fiffi bellt.“ B: „Rex bellt.“ C: „Der Nachbar schimpft.“
Formuliere folgende Aussagen formal mit Hilfe von logischen Operatoren:

(i) „Entweder Fiffi bellt oder Rex bellt.“

(ii) „Wenn Rex bellt, dann schimpft der Nachbar.“

(iii) „Genau dann, wenn Rex nicht bellt, bellt Fiffi und der Nachbar schimpft.“

(iv) „Der Nachbar schimpft und Fiffi oder Rex bellen.“

(v) „Keiner der Hunde bellt.“

Aufgabe 2

a) Ist die Aussage $((A \rightarrow B) \vee B) \rightarrow A$ eine Tautologie?
b) Ist die Aussage $(A \oplus B) \rightarrow \neg B$ eine Tautologie?

Aufgabe 3

Der NAND-Operator $\uparrow$ ist definiert durch $A \uparrow B := \neg(A \wedge B)$.
a) Zeige mit Hilfe von Wahrheitstabellen: $A \uparrow (B \uparrow B) \neq (A \uparrow B) \uparrow B$.
b) Ersetze $A \vee B$ durch einen logisch äquivalenten Ausdruck, der nur den NAND-Operator enthält.

Aufgabe 4

Aufgaben zur logischen Äquivalenz:

a) Gilt $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$?
b) Gilt $\neg(A \vee B) = \neg A \vee \neg B$?

Aufgabe 5

Indiana Jones ist in einer Grabkammer eingeschlossen. Der Öffnungsmechanismus des Ausgangs wird von drei Hebeln gesteuert, die sich in der Wand befinden. An die Wand wurde von den Erbauern der Grabkammer folgende kryptische Beschreibung des Öffnungsmechanismus hinterlassen:

1. Mindestens ein Hebel muss gezogen werden!
2. Wenn der linke Hebel gezogen wird, dann muss auch der mittlere oder rechte Hebel gezogen werden!
3. Es müssen entweder der mittlere und rechte Hebel gemeinsam gezogen werden oder beide dürfen nicht gezogen werden!
4. Es dürfen der linke und der rechte Hebel nicht beide gezogen werden!

Zieht Indiana die falschen Hebel, so fließt die Grabkammer mit Sand voll und er stirbt mit Sicherheit. Hilf ihm, da er keine Kenntnisse in Aussagenlogik hat.

Lösungen zum Übungsblatt zur Aussagenlogik

Aufgabe 1

Gegeben sind die Aussagen:

A: „Fiffi bellt.“ B: „Rex bellt.“ C: „Der Nachbar schimpft.“

Formuliere folgende Aussagen formal mit Hilfe von logischen Operatoren:

(i) „Entweder Fiffi bellt oder Rex bellt.“ $= A \oplus B$.

(ii) „Wenn Rex bellt, dann schimpft der Nachbar.“ $= B \to C$.

(iii) „Genau dann, wenn Rex nicht bellt, bellt Fiffi und der Nachbar schimpft.“ $= \neg B \leftrightarrow (A \wedge C) = (\neg B \leftrightarrow A) \wedge C$.

(iv) „Der Nachbar schimpft und Fiffi oder Rex bellen.“ $= C \wedge (A \vee B)$.

(v) „Keiner der Hunde bellt.“ $= \neg(A \vee B)$.

Aufgabe 2

a) Ist die Aussage $((A \to B) \vee B) \to A$ eine Tautologie?

b) Ist die Aussage: $(A \oplus B) \to \neg B$ eine Tautologie?

Lösungen:

a)

A	B	C: $A \to B$	D: $C \vee B$	$D \to A$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	w	f

Die Aussage ist keine Tautologie.

b)

A	B	C: $A \oplus B$	$\neg B$	$C \to \neg B$
w	w	f	f	w
w	f	w	w	w
f	w	w	f	f
f	f	f	w	w

Die Aussage ist auch keine Tautologie.

Aufgabe 3

Der NAND-Operator $\uparrow$ ist definiert durch $A \uparrow B := \neg(A \wedge B)$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen: $A \uparrow (B \uparrow B) \neq (A \uparrow B) \uparrow B$.

b) Ersetzen Sie $A \vee B$ durch einen logisch äquivalenten Ausdruck, der nur den NAND-Operator enthält.
Lösungen:

a)

A	B	C: $B \uparrow B$	$A \uparrow C$
w	w	f	w
w	f	w	f
f	w	f	w
f	f	w	w

$\neq$

A	B	C: $A \uparrow B$	$C \uparrow B$
w	w	f	w
w	f	w	w
f	w	w	f
f	f	w	w

b) Es ist $A \vee B = (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$, siehe nachfolgende Tabelle:

A	B	C: $A \uparrow A$	D: $B \uparrow B$	$C \uparrow D$
w	w	f	f	w
w	f	f	w	w
f	w	w	f	w
f	f	w	w	f

Die resultierenden Wahrheitswerte in der letzten Spalte entsprechen denen aus der **oder** Verknüpfung.

Aufgabe 4

Aufgaben zur logischen Äquivalenz:

a) Gilt $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$?

b) Gilt $\neg(A \vee B) = \neg A \vee \neg B$?
Lösungen:
a)

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Vergleich mit den Wahrheitswerten von $A \leftrightarrow B$ zeigt: Logische Äquivalenz.

b) Der Vergleich der Tabelleneinträge unten zeigt: Keine logische Äquivalenz.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	w	f	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	f	w	w

Aufgabe 5

Indiana Jones ist in einer Grabkammer eingeschlossen. Der Öffnungsmechanismus des Ausgangs wird von drei Hebeln gesteuert, die sich in der Wand befinden. An die Wand wurde von den Erbauern der Grabkammer folgende kryptische Beschreibung des Öffnungsmechanismus hinterlassen:

1. Mindestens ein Hebel muss gezogen werden!
2. Wenn der linke Hebel gezogen wird, dann muss auch der mittlere oder rechte Hebel gezogen werden!
3. Es müssen entweder der mittlere und rechte Hebel gemeinsam gezogen werden oder beide dürfen nicht gezogen werden!
4. Es dürfen der linke und der rechte Hebel nicht beide gezogen werden!

Zieht Indiana die falschen Hebel, so fließt die Grabkammer mit Sand voll und er stirbt mit Sicherheit. Hilf ihm, da er keine Kenntnisse in Aussagenlogik hat.

In der Lösung gehen wir sinnvollerweise davon aus, dass alle kryptischen Hinweise auch erfüllt sein müssen, also wahre Aussagen sind.

Wir formulieren folgende elementare Aussagen:
L: „Der linke Hebel muss gezogen werden."
M: „Der mittlere Hebel muss gezogen werden." und
R: „Der rechte Hebel muss gezogen werden."

Die kryptischen Hinweise [1.] bis [4.] formulieren wir wie folgt:
[1.]: $L \vee M \vee R$
[2.]: $L \rightarrow (M \vee R)$
[3.]: $(M \wedge R) \oplus \neg(M \vee R)$
[4.]: $\neg(L \wedge R)$

Damit stellen wir folgende Wahrheitstabelle auf und schauen uns diejenige Zeile an, in der alle kryptischen Hinweise mit *wahr* bewertet sind:

L	M	R	$L \vee M \vee R$	$L \rightarrow (M \vee R)$	$(M \wedge R) \oplus \neg(M \vee R)$	$\neg(L \wedge R)$
w	w	w	w	w	w	f
w	w	f	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w
f	f	f	f	w	w	w

Aus der fünften Zeile entnehmen wir aus den ersten drei Spalten, dass Indiana den mittleren und rechten Hebel ziehen muss, um aus der Schatzkammer zu gelangen.