Euklidischer Algorithmus

Thema im Kontext

Die gängigen Teilbarkeitsregeln und das Rechnen mit natürlichen Zahlen sind den Schülerinnen und Schülern bekannt. Der Euklidische Algorithmus ist eines der ältesten und wichtigsten Beispiele für Algorithmen in der Mathematik. Er eignet sich dazu, den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen auszurechnen und kann leicht durchgeführt werden.

Einführung

Ein Algorithmus bezeichnet in der Mathematik eine genau festgelegte Abfolge von Rechenschritten. Mit dem Euklidischen Algorithmus hat die Verwendung von mathematischen Algorithmen vor mehr als 2000 Jahren angefangen. Auch heute noch ist er in der Mathematik sehr wichtig, denn er hat nützliche Anwendungen, zum Beispiel bei praktischen Teilerberechnungen.

Wir fragen uns: Was genau leistet der Euklidische Algorithmus und auf welche Weise wird dies erreicht?

Der Euklidische Algorithmus bestimmt zu zwei beliebigen natürlichen Zahlen den größten gemeinsamen Teiler (ggT). Beispielsweise hat der ggT für die Zahlen 6 und 10 den Wert 2, weil 2 sowohl 6 als auch 10 ohne Rest teilt und weil es keine größere natürliche Zahl geben kann, die beide Zahlen gleichzeitig teilt. Die Zahl 6 hätte zwar noch die größeren Teiler 3 und 6, aber beide teilen 10 nicht. Die Berechnung des ggT bei kleinen Zahlen ist natürlich recht einfach; wie können wir jedoch bei größeren Zahlen vorgehen? Können wir etwa den ggT der beiden Zahlen 174 und 102 problemlos bestimmen? Welchen Wert hat der ggT von 1802 und 1054?

Theoretische Grundlagen und Hintergrund

Zur Beantwortung der Frage nach dem ggT großer natürlicher Zahlen eignet sich der Euklidische Algorithmus hervorragend. Das Verfahren kann wie folgt beschrieben werden:

Teile so lange mit Rest, bis schließlich der Rest 0 erreicht ist.

Beispiel 1

Wir untersuchen das mit der Werten $a = 174$ und $b = 102$. Wir beginnen mit der größeren Zahl, a, und teilen diese durch die kleinere, b, mit Rest. Die Zahl b geht genau einmal in a auf, und es bleibt der Rest 72:

$$174 = 1 \cdot 102 + 72.$$

Wir fahren entsprechend mit den Zahlen 102 und 72 fort. Die neue Zahl a ist also jetzt 102, und die neue Zahl b ist 72. Dann ergibt sich:

$$102 = 1 \cdot 72 + 30.$$

Und weiter geht es mit den Zahlen 72 und 30:

$$72 = 2 \cdot 30 + 12.$$

Dann mit den Zahlen 30 und 12:

$$30 = 2 \cdot 12 + 6.$$

Und schließlich mit den Zahlen 12 und 6:

$$12 = 2 \cdot 6 + 0.$$

Am Ende ist der Rest 0 erreicht; der Algorithmus ist beendet. Der ggT der beiden Anfangszahlen ist jetzt der letzte Rest ungleich Null, in unserem Beispiel also 6. Und tatsächlich ist 6 sowohl ein Teiler von 174 als auch von 102, und es gibt keinen größeren gemeinsamen Teiler.

Ob das immer so funktioniert, ist nicht direkt klar. Ein mathematischer Satz (s.u.) besagt, dass der Euklidische Algorithmus am Ende immer den ggT der Ausgangszahlen liefert.

Allgemein gilt, analog zur Vorgehensweise im Beispiel: Zu zwei natürlichen Zahlen $a \geq b$ gibt es stets genau eine natürliche Zahl q und eine natürliche Zahl r (der Rest), so dass

$$a = q \cdot b + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < b.$$

Führt man den Algorithmus für zwei beliebige Zahlen $a \geq b$ durch, so nehmen wir zwecks einfacherer Darstellung eine Umbenennung vor: Wir schreiben a_0 für a und a_1 für b. Dann ist der Ablauf wie folgt:

$$\begin{aligned}
a_0 &= q_1 \cdot a_1 + a_2, && \text{wobei } 0 \leq a_2 < a_1, \\
a_1 &= q_2 \cdot a_2 + a_3, && \text{wobei } 0 \leq a_3 < a_2, \\
a_2 &= q_3 \cdot a_3 + a_4, && \text{wobei } 0 \leq a_4 < a_3, \\
&\vdots \\
a_{k-2} &= q_{k-1} \cdot a_{k-1} + a_k, && \text{wobei } 0 \leq a_k < a_{k-1}, \\
a_{k-1} &= q_k \cdot a_k + 0.
\end{aligned}$$

Wir haben uns in Beispielen überzeugen können, dass dieser Algorithmus wirklich den ggT liefert. Aber gilt dies für alle Anfangszahlen a und b? Genau das besagt der nachfolgende Satz:

Satz 1

Der Euklidische Algorithmus liefert in jedem Fall den ggT der beiden Anfangszahlen, und es ist $a_k = ggT(a_0, a_1)$.

Man kann diesen Satz mathematisch beweisen, indem man sich im ersten Schritt überlegt, dass a_k ein gemeinsamer Teiler von a_0 und a_1 ist, und im zweiten Schritt zusätzlich begründet, dass es keinen größeren gemeinsamen Teiler als a_k geben kann.

Übungsblatt zum Euklidischen Algorithmus

Aufgabe 1:

Wie genau läuft der Euklidische Algorithmus ab, wenn man ihn mit den Zahlen 1802 und 1054 füttert? Wie viele Schritte sind nötig, und welches ist der ggT der beiden Zahlen?

Aufgabe 2:

Zu berechnen ist $ggT(12378, 3054)$.

Aufgabe 3:

Die Zahl a hat den Wert 12. Für welchen Wert von b endet der Euklidische Algorithmus nach genau zwei Schritten?

Aufgabe 4:

Zwei Stoffbahnen sind 413 cm und 295 cm lang. Sie sind so zu zerschneiden, dass daraus möglichst große, gleich lange Bahnen entstehen und kein Reststück bleibt. Wie lang wird eine solche Stoffbahn?

Lösungen zu den Aufgaben

Aufgabe 1:

$$\begin{aligned} 1802 &= 1 \cdot 1054 + 748, \\ 1054 &= 1 \cdot 748 + 306, \\ 748 &= 2 \cdot 306 + 136, \\ 306 &= 2 \cdot 136 + 34, \\ 136 &= 4 \cdot 34 + 0. \end{aligned}$$

Nach fünf Gleichungen endet der Algorithmus, und es ist $ggT(1802, 1054) = 34$.

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned} 12378 &= 4 \cdot 3054 + 162, \\ 3054 &= 18 \cdot 162 + 138, \\ 162 &= 1 \cdot 138 + 24, \\ 138 &= 5 \cdot 24 + 18, \\ 24 &= 1 \cdot 18 + 6, \\ 18 &= 3 \cdot 6 + 0. \end{aligned}$$

Also ist $ggT(12378, 3054) = 6$.

Aufgabe 3:

Wir verwenden $b := 8$.

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \cdot 8 + 4, \\ 8 &= 2 \cdot 4 + 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

Es ist der ggT von 413 und 295 zu bestimmen. Dieser hat den Wert 59, so dass jede Stoffbahn 59 cm lang ist.