Hochschule
für Technik
Stuttgart

HFT Stuttgart
Fakultät Vermessung, Informatik und Mathematik
Fachgruppe Mathematik

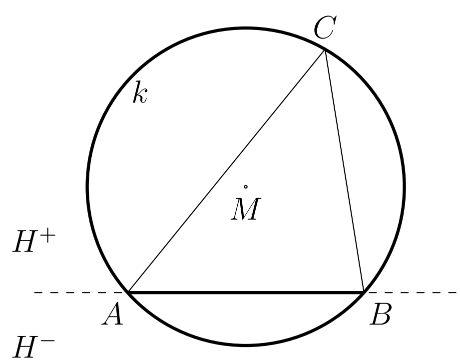
Der Umfangswinkelsatz und der Mittelpunktswinkelsatz

Der Umfangswinkelsatz gehört am Rande zur Geometrie der Klasse 8. Der Thalessatz im Lehrplan der Klasse 8 ist ein Spezialfall des Umfangswinkelsatzes.

1. Der Umfangswinkelsatz und sein Beweis

Geometrische Objekte beim Umfangswinkelsatz:

Gegeben ist ein Kreis k mit Mittelpunkt M und eine Sehne $\overline{AB}$ des Kreises mit den Endpunkten A und B. Die Sekante AB, auf der die Sehne $\overline{AB}$ des Kreises liegt, teilt die Ebene in zwei Halbebenen.



Wenn die Sehne kein Kreisdurchmesser ist, nennen wir die eine Halbebene, die den größeren Teil des Kreisinneren enthält, die Halbebene H^+, die andere H^-. M liegt in diesem Fall in H^+.
Im Falle, dass die Sehne ein Kreisdurchmesser ist, wird die Bezeichnung H^+ und H^- willkürlich vergeben.

Gegeben ist ein weiterer dritter Kreispunkt C, der verschieden von den Kreispunkten A und B ist.
Der Kreis k ist dann der Umkreis des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C, und M ist der Umkreismittelpunkt und daher der Schnitt der Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten.

Das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C wird kurz mit $\triangle ABC$ bezeichnet.

Winkel sollen im Folgenden positiv sein, d.h. sie sind entgegen des Uhrzeigersinns orientiert. Die Schenkel von Winkeln sind Strecken oder Geraden.

Definitionen:

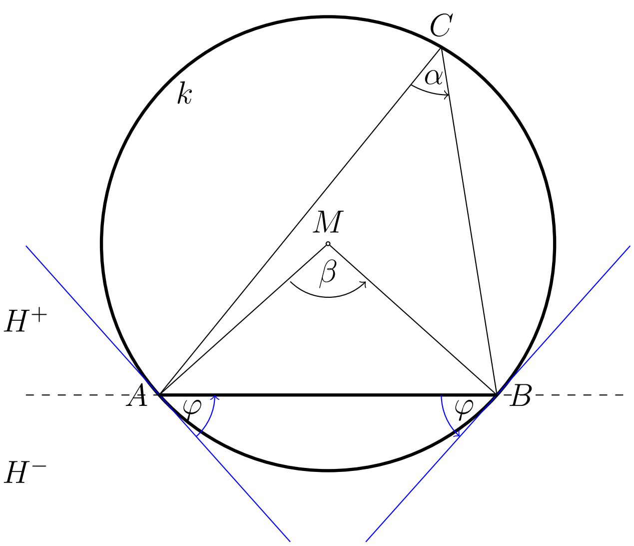
Ein Winkel α heißt *Umfangswinkel (über der Sehne $\overline{AB}$)*, wenn α den Scheitel C und die Schenkel $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ besitzt.

Ein Winkel mit Scheitelpunkt M heißt *Mittelpunktswinkel.*
Ein Mittelpunktswinkel β heißt *Mittelpunktswinkel über der Sehne $\overline{AB}$*, wenn β die Schenkel $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ besitzt.

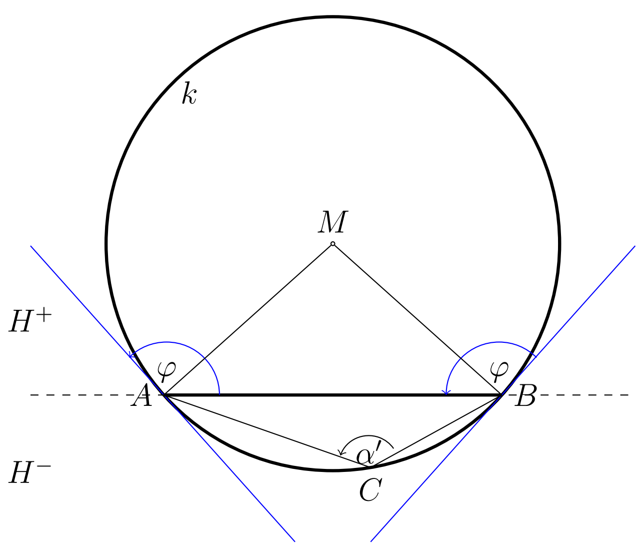
Der Winkel φ heißt *Sehnentangentenwinkel zu $\overline{AB}$*, wenn er die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

- φ hat den Scheitel A, die Sehne $\overline{AB}$ ist ein Schenkel von φ und die Kreistangente in A ist der zweite Schenkel von φ, oder
  φ hat den Scheitel B, die Sehne $\overline{AB}$ ist ein Schenkel von φ und die Kreistangente in B ist der zweite Schenkel von φ,
- φ liegt in H^-, falls C sich in H^+ befindet, oder φ liegt in H^+, falls C sich in H^- befindet.

C in H^+:



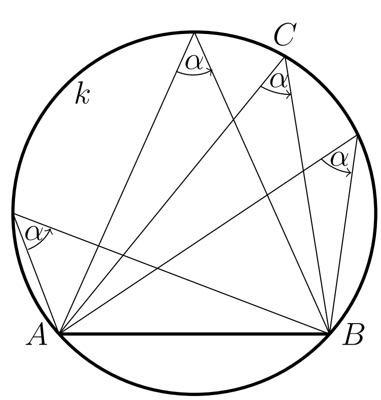
C in H^-:



Umfangswinkelsatz, Peripheriewinkelsatz:

Alle Umfangswinkel in H^+ über derselben Sehne eines Kreises sind gleich groß. Sei dieser Wert α.
Alle Umfangswinkel in H^- über derselben Sehne eines Kreises sind gleich groß mit Wert $\alpha' = 180° - \alpha$.

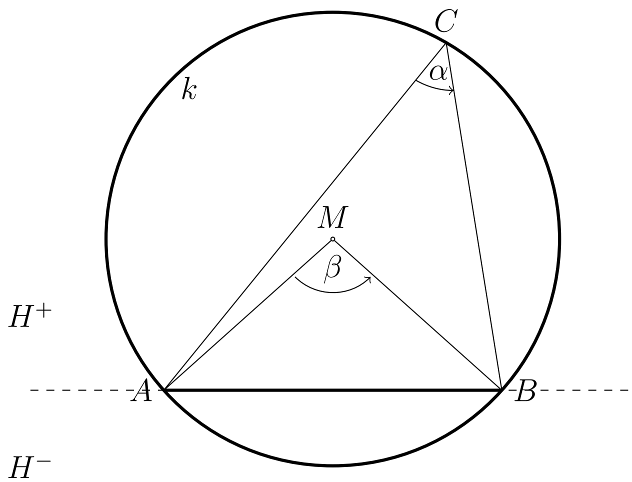
Bild für C in H^+ mit Umfangswinkel α:



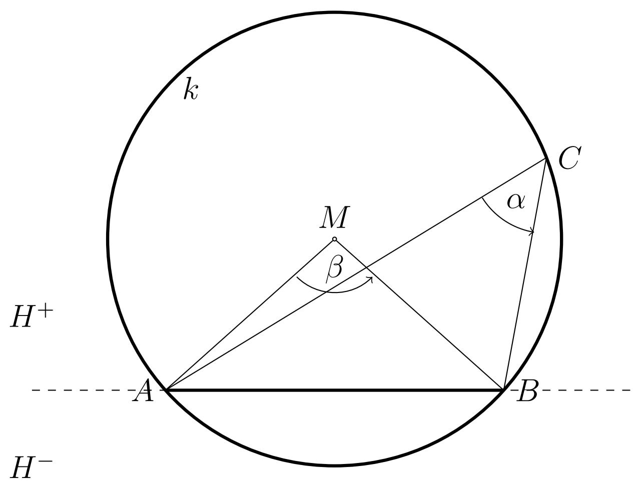
Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass C in H^+ liegt.

① Fall: M liegt innerhalb von $\triangle ABC$:



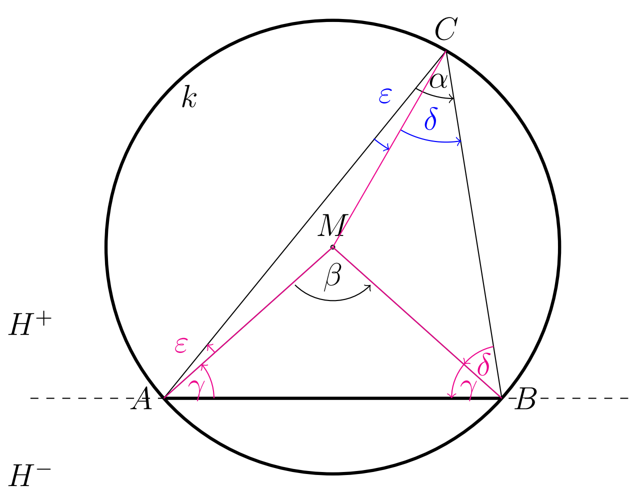
② Fall: M liegt außerhalb von $\triangle ABC$:

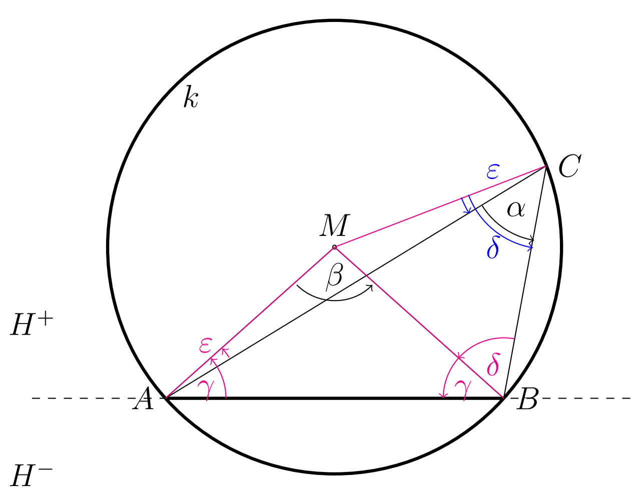


Zerlegen von $\triangle ABC$ in drei gleichschenklige Dreiecke

$$\triangle AMB, \triangle BCM, \triangle AMC$$

mit Basiswinkel $\gamma, \delta, \varepsilon$.





Dann gilt: $\alpha = \delta + \varepsilon$. $\qquad$ $\alpha = \delta - \varepsilon$.

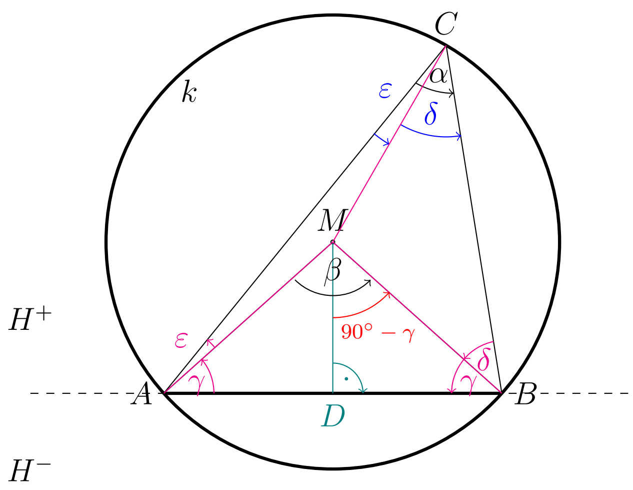
Aus dem Satz über die Winkelsumme im $\triangle ABC$ folgt:

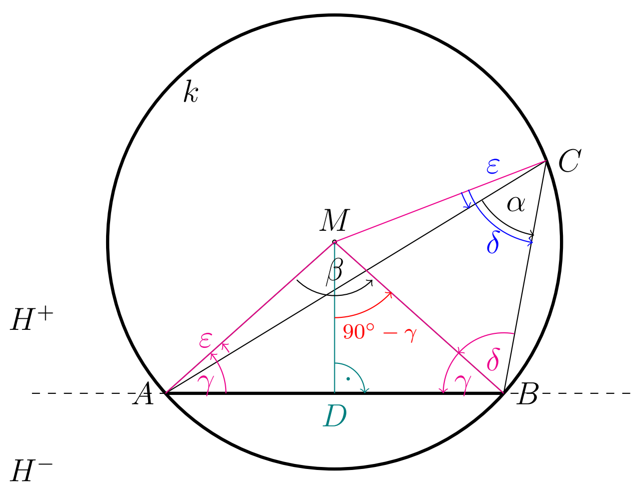
$$2(\gamma + \delta + \varepsilon) = 180^\circ \qquad\qquad 2(\gamma + \delta - \varepsilon) = 180^\circ$$

oder

$$90^\circ - \gamma = \delta + \varepsilon \qquad\qquad 90^\circ - \gamma = \delta - \varepsilon$$

Einführung der Mittelsenkrechten MD auf $\overline{AB}$:





Dann gilt für den Winkel $90° - \gamma$ an M im rechtwinkligen Dreieck $\triangle DMB$:

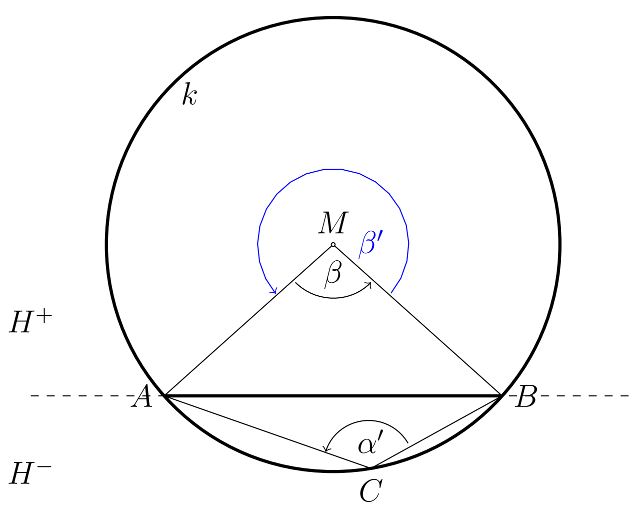
$$90° - \gamma = \delta + \varepsilon \qquad\qquad 90° - \gamma = \delta - \varepsilon$$

Hieraus folgt: $\beta = 2(90° - \gamma) = 2(\delta + \varepsilon) = 2\alpha$ $\qquad$ $\beta = 2(90° - \gamma) = 2(\delta - \varepsilon) = 2\alpha$

Der Winkel β ist abhängig von der Wahl der Punkte A und B, aber unabhängig von der Lage von C auf dem Kreisbogen über der Sehne. Somit ist $\alpha = \frac{\beta}{2}$ unabhängig von der Lage von C. Damit ist der Umfangswinkelsatz für C in H^+ bewiesen.

Bemerkung zum Fall „C in H^-“:

Für den zugehörigen Mittelpunktswinkel β' über der Sehne $\overline{AB}$ gilt $\beta' = 360° - \beta$, s. unteres Bild. Es kann analog wie oben gezeigt werden: Der Umfangswinkel ist $\alpha' = \frac{\beta'}{2} = 180° - \frac{\beta}{2} = 180° - \alpha$. Die Winkel β bzw. α sind nach obigen Betrachtungen unabhängig von der Lage von C und daraus folgt die Behauptung.



Bemerkung zum Fall „$C = A$ oder $C = B$“:

In diesem Fall ist der Winkel α nicht definiert.

2. Folgerungen aus dem Umfangswinkelsatz

Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt direkt der

Mittelpunktswinkelsatz, der Satz vom Mittelpunktswinkel:

Alle Umfangswinkel über derselben Sehne eines Kreises sind halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel.

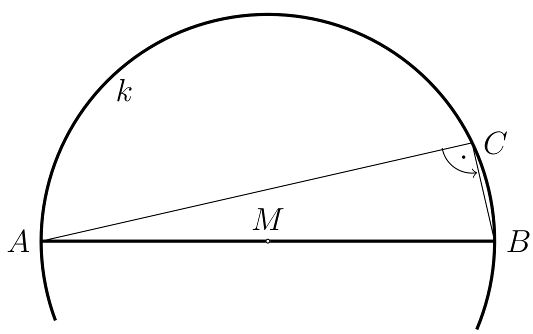
Und daraus wiederum der

Satz von Thales:

Jeder Umfangswinkel über einem Kreisdurchmesser ist ein rechter Winkel.

Begründung:

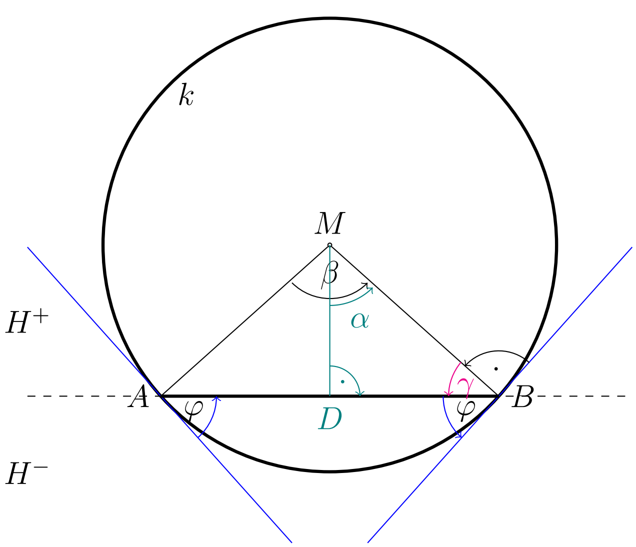
Sei $\overline{AB}$ ein Kreisdurchmesser, dann ist der Winkel bei M $\beta = 180^\circ$ und damit beträgt der Winkel α 90°.



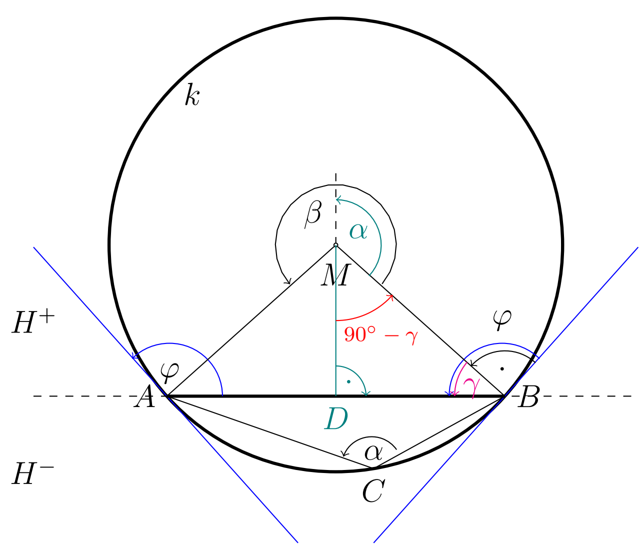
Satz vom Sehnentangentenwinkel:

Der zu einer Sehne $\overline{AB}$ eines Kreises gehörende Sehnentangentenwinkel φ ist so groß wie der Umfangswinkel α.

φ in H^-:



φ in H^+:



Beweis:

Wie beim Beweis des Umfangswinkelsatzes wird die Mittelsenkrechte vom Kreismittelpunkt M auf die Strecke $\overline{AB}$ gefällt. Das Dreieck mit den Eckpunkten A, B, M zerfällt durch die Mittelsenkrechte MD in zwei rechtwinklige kongruente Dreiecke, eines ist das mit den Eckpunkten D, B, M.

φ in H^-:
Die Innenwinkel des Dreiecks $\triangle DBM$ sind neben dem rechten Winkel die Winkel $\frac{\beta}{2} = \alpha$ und γ. Somit ist einerseits $\alpha + \gamma = 90°$ aus der Innenwinkelsumme. Andererseits ergänzt bei B der Winkel φ den Winkel γ zu einem rechten: $\varphi + \gamma = 90°$. Vergleich der beiden Gleichungen liefert $\alpha = \varphi$.

φ in H^+:
Es gilt einerseits bei B: $\varphi = 90° + \gamma$ und andererseits ergänzt der Winkel α den Winkel $90° - \gamma$ zu $180°$: $\alpha + 90° - \gamma = 180°$ und daraus $\alpha = 90° + \gamma$.
Durch Vergleich der beiden Gleichungen folgt auch in diesem Fall $\alpha = \varphi$.

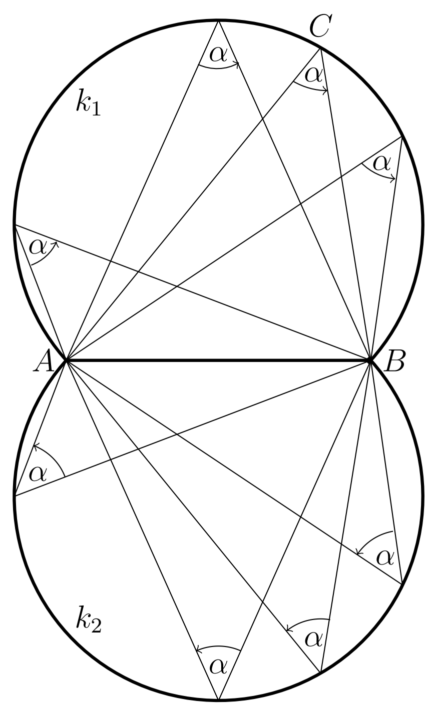
3. Umkehrung des Umfangswinkelsatzes

Der geometrische Ort aller Punkte, welche Scheitelpunkte von Winkeln fester gegebener Größe α über einer Strecke $\overline{AB}$ sind,

- besteht für $\alpha \neq 90°$ aus genau zwei verschiedenen Kreisbögen k_1 und k_2 mit diesem Winkel α als Umfangswinkel und mit der Strecke $\overline{AB}$ als Sehne, die spiegelsymmetrisch zur Geraden AB sind,
- ist für $\alpha = 90°$ der Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$.

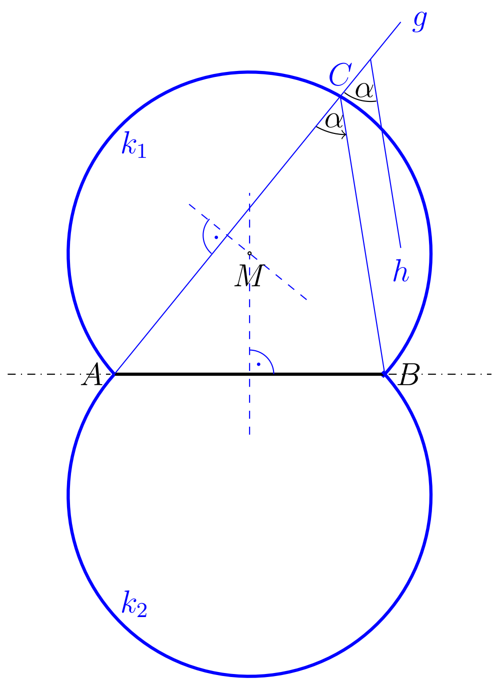
Die beiden Kreisbögen im Fall $\alpha \neq 90°$ heißen *Fasskreisbögen zur Sehne $\overline{AB}$ und Winkel α*.

Bild für $\alpha \neq 90°$:



Die Fasskreisbögen können wie folgt konstruiert werden:

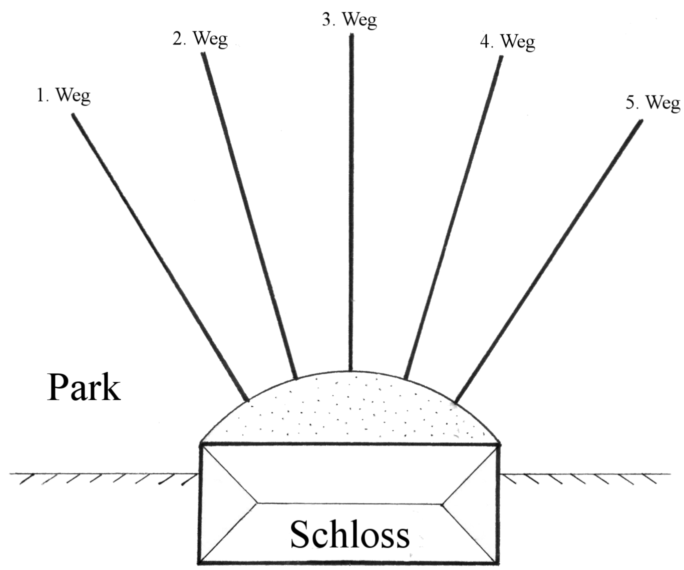
Gegeben sei der Wert von α im Gradmaß und die Strecke $\overline{AB}$.
Zeichne eine Gerade g durch A, auf der die Sehne nicht liegt. Lege einen Punkt auf g fest und trage dort den gegebenen Winkel α ab. Der zweite Schenkel des Winkels sei die Gerade h. Ziehe eine Parallele zu h durch den Punkt B. Der Schnitt der Parallelen mit g ist eine Lage des Punkts C. Somit hat man drei Kreispunkte A, B, C, die ein Dreieck bilden, und es kann mittels der Mittelsenkrechten zweier Dreiecksseiten der Umkreismittelpunkt M konstruiert werden. Der Kreis um M mit Radius $|AM|$ liefert den Kreisbogen k_1, auf dem C liegt. Spiegelung des Kreisbogens k_1 an der Geraden, auf der die Strecke $\overline{AB}$ liegt, liefert den zweiten Fasskreisbogen k_2.



Eine alternative Konstruktion besteht aus dem Errichten eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Eckpunkten A, B und dem neuen Eckpunkt M so, dass bei M ein Innenwinkel von $2\alpha = \beta$ entsteht, falls $\alpha < 90°$. Für $\alpha > 90°$ wird bei M der Innenwinkel $360° - 2\alpha$ benutzt. M ist dann der Mittelpunkt eines Fasskreisbogens.

4. Behandlung des Themas im Unterricht

1. **Gruppenarbeit „Tourist mit Kamera“**, nach [2]:
   Ein Tourist soll mit seiner Kamera mit festem Öffnungswinkel α die Vorderfront eines Schlosses fotografieren, so dass sie gerade auf das Foto passt. Im Park stehen dem Touristen z.B. auf fünf Wegen mögliche Standorte zur Verfügung.



a) **Aufgaben an die Schüler/-innen in Gruppenarbeit:**
Jede Gruppe untersucht zu einem festen vorgegebenen Winkel α (Z.B.: Gruppe 1: $\alpha = 45°$, Gruppe 2: $\alpha = 55°$, usw.) die möglichen Standorte des Touristen auf allen Wegen.

Diskussion innerhalb der einzelnen Gruppen:
Auf welcher Kurve könnten alle Standorte liegen?
Welche Eigenschaften hat eine solche Kurve?

Vergleich der Ergebnisse zwischen den einzelnen Gruppen.

b) **Abstraktion an der Tafel:**
Auf welche Größen kommt es an? Welche geometrischen Objekte spielen eine Rolle?
Gibt es Symmetrien bei der entstehenden Kurve?
Was passiert, wenn man nicht den Winkel vorher festlegt, sondern sich auf einem festen Weg dem Schloss nähert oder weiter weg geht?

2. **Formulierung des Umfangswinkelsatzes**, der Folgerungen und seiner Umkehrung.

3. **Gruppenarbeit in Paaren am Computer:**
Dei Schüler/innen machen eigene Erfahrungen an kostenloser interaktiver Software, z.B. den Graphikprogrammen Cinderella [3], EUKLID DynaGeo [6] oder GeoGebra (Classic) [9].

   Aufgaben könnten z.B. sein:

   - *Gegeben:* Winkel α, Strecke $\overline{AB}$.
   Aufgabe: Ortslinie des Punktes C zeichnen.

   - *Gegeben:* Kreisbogen über einer Sehne.
   Aufgabe: Umfangswinkel messen und Unabhängigkeit von der Lage des Punktes C feststellen. Ein Punkt außerhalb und innerhalb des Kreises betrachten und Werte der Winkel verfolgen.

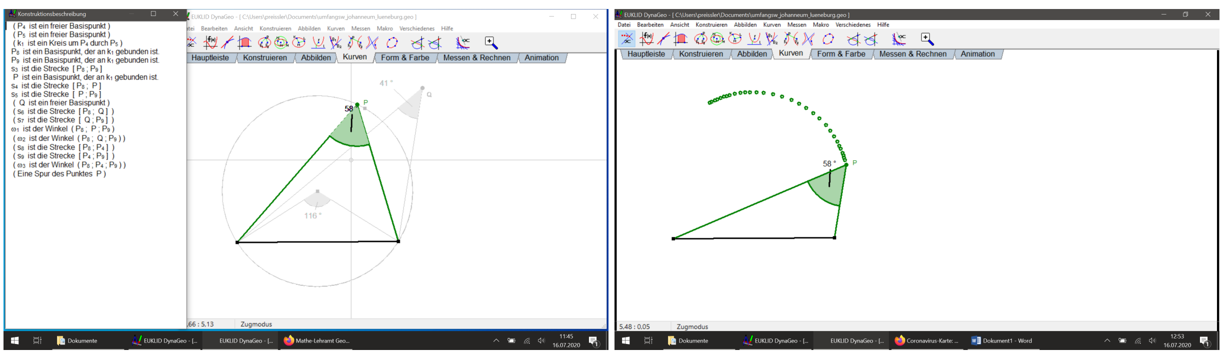
Unterstützende Dateien zur Software:

Cinderella und GeoGebra:

In [4] wird auf der ersten Seite ein anderer Beweis des Umfangswinkelsatzes aufgeführt und dieser Beweis wird in der GeoGebra-Datei Peripheriewinkelsatz.ggb, die auf der Webseite [5] in dem zip-Archiv 2-Makros.zip downgeloadet werden kann, Schritt für Schritt nachvollzogen. Dabei können verschiedene Punkte auch interaktiv verändert werden. In dem zip-Archiv 2-Makros.zip findet sich auch die Cinderella-Datei Peripheriewinkelsatz.cdy, die eine interaktive Betrachtung des Umfangswinkelsatzes in Cinderella ermöglicht.

EUKLID DynaGeo:

EUKLID DynaGeo ist ein über GitHub verwaltetes Programmpaket der Geometrie, [7].
Von der Webseite [8] kann man eine DynaGeo-Datei zum Umfangswinkelsatz downloaden. Wenn man den Fasskreis vorab verbirgt, können die Schüler/innen die Ortslinie des Punktes C (dort in der Bezeichnung P) über das Programm selbst herstellen oder ggf. die Konstruktion der Figur anhand des vorgegebenen Konstruktionstexts selber an der Software nachvollziehen.



Linker Screenshot: Arbeitsoberfläche mit Konstruktionstext, rechter Screenshot: Erzeugung der Ortskurve

GeoGebra:

Auf der Webseite [10] gibt es ein interaktives Beispiel in GeoGebra. Dort kann man an allen gegebenen Punkten ziehen und die Veränderungen der Größen studieren.

5. Quellen

[1] Werner Jock, Der Umfangswinkelsatz: Hinführung und Anwendung, Der Mathematikunterricht 1/1994, S. 13-24.

[2] Michael Neubrand, Mathematische Aktivitäten rund um den Umfangswinkelsatz, Didaktik der Mathematik 18, 4/1990, S. 271-289.

[3] *Cinderella:* https://cinderella.de/tiki-index.php, Zugriff am 14.2.2021

[4] Hermann Vogel, https://geo.ma.tum.de/_Resources/Persistent/f/f/6/0/ff60bc010b93108ca7a5a276857fbf3fa56bd666/2-Makros-Zusatz.pdf, Technische Universität München, Zugriff am 14.2.2021

[5] Hermann Vogel, https://www-m10.ma.tum.de/bin/view/Lehre/SS15/ComputerpraktikumMA2210.html, zip-Archiv: 2-Makros.zip, Technische Universität München, dort Peripheriewinkelsatz.cdy und Peripheriewinkelsatz.ggb, Zugriff am 14.2.2021

[6] *EUKLID DynaGeo:* http://www.dynageo.de/, Zugriff am 14.2.2021

[7] *EUKLID DynaGeo auf GitHub:* https://github.com/RolandMech/DynaGeo, Zugriff am 14.2.2021

[8] Dörte Haftendorn, http://www.johanneum-lueneburg.de/homepage/faecher/mathe/geometri/elementargeo/umfangsw.htm, Gymnasium Johanneum Lüneburg, Zugriff am 14.2.2021

[9] *GeoGebra:* https://www.geogebra.org, Zugriff am 14.2.2021

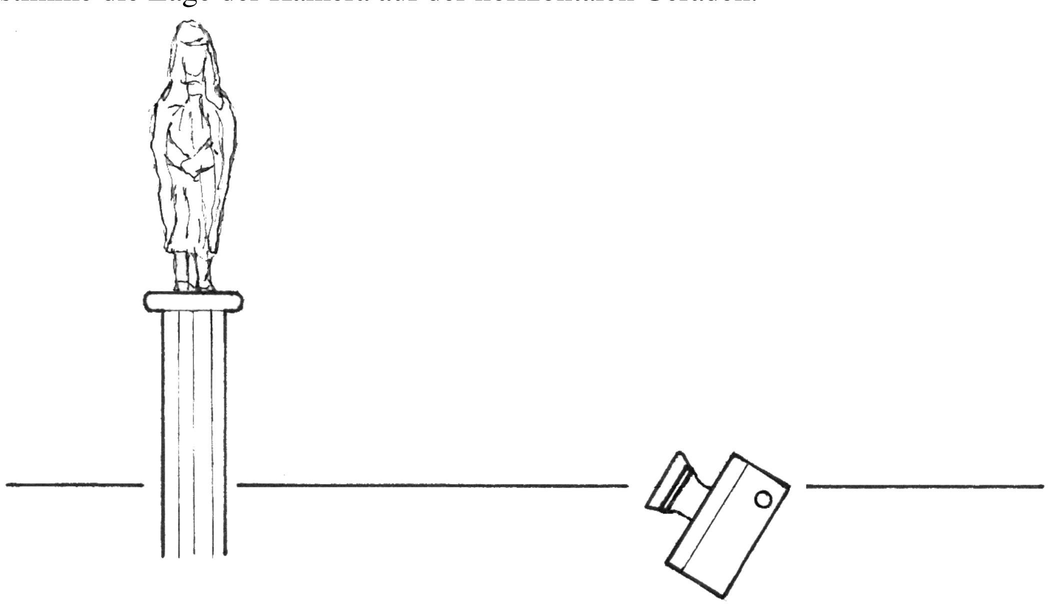
[10] Hubert Dammer, Andreas Brinken, https://www.geogebra.org/m/dRthc24J, Zugriff am 14.2.2021

6. Aufgaben zum Umfangswinkelsatz

1. **Konstruktion der Fasskreisbögen zu gegebener Stecke und gegebenem Winkel, s. oben.**

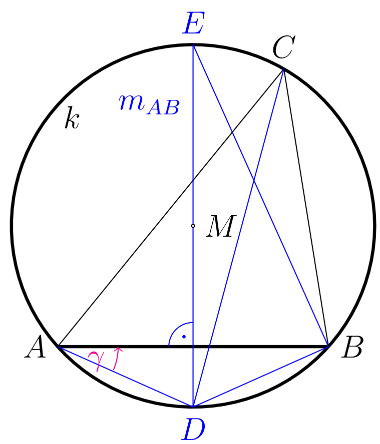
2. **Fotografieren einer Figur auf einem Sockel**, nach [1], [2]

   Eine Figur auf einem Sockel soll mit einer Kamera mit *möglichst großem* Öffnungswinkel fotografiert werden. Dabei soll sich die Kamera nur auf der Horizontalen bewegen.
   Bestimme die Lage der Kamera auf der horizontalen Geraden.



3. **Betrachtungen an Dreieck und seinem Umkreis**, aus [2]

   Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C und der Mittelsenkrechten m_{AB} zur Strecke $\overline{AB}$. Seien D und E die Schnittpunkte des Umkreises k des Dreiecks mit m_{AB}. Sei γ der Winkel mit Scheitel A und Schenkeln $\overline{AD}$ und $\overline{AB}$. Dazu sei das folgende Bild (s. [2]) gegeben.

   Gib an, wo im Bild der Winkel γ noch in der Figur auftritt.
   Zeige dann, dass die Strecke $\overline{DC}$ den Dreiecksinnenwinkel bei C halbiert.

   Daraus folgt, dass sich die Mittelsenkrechte m_{AB} und die Winkelhalbierende w_C auf dem Umkreis des Dreiecks im Schnittpunkt D schneiden.

   Damit ergibt sich der **Satz**:

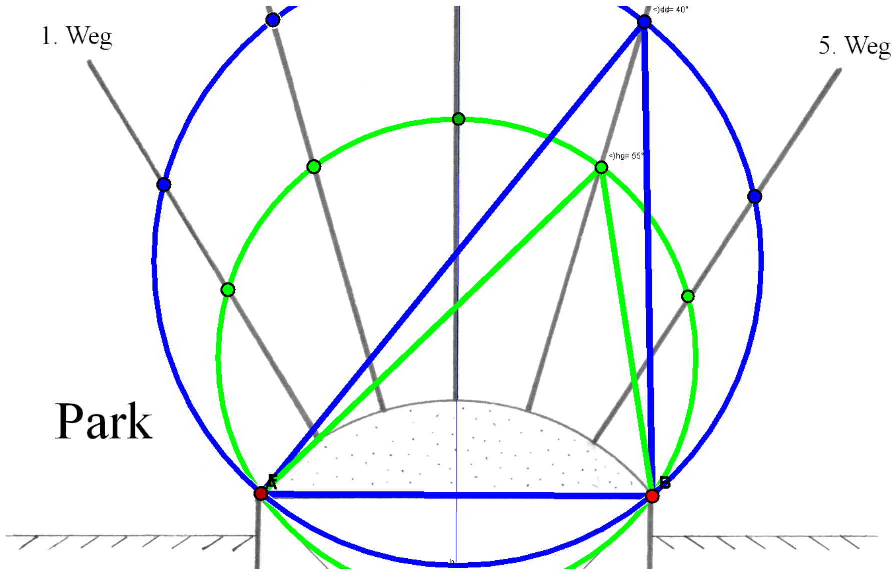
   In einem Dreieck schneiden sich entsprechende Mittelsenkrechten und Winkelhalbierende auf dem Umkreis des Dreiecks.
   Dabei heißt „entsprechend", dass die Winkelhalbierende durch den Eckpunkt des Dreiecks geht, der nicht Endpunkt der Dreiecksseite ist, auf der die Mittelsenkrechte senkrecht steht.

7. Lösungen

Nachfolgend sind Lösungsvorschläge zu 4.1 „Tourist mit Kamera" und den Aufgaben 2 und 3 in Abschnitt 6 angegeben.

Zu 4.1 „Tourist mit Kamera":

Zu a):
In der folgenden Abbildung ist in grün die Lösung für den Umfangswinkel $\alpha = 55°$ angegeben, in blau die Lösung für $\alpha = 40°$.



Die Standorte auf den Wegen liegen jeweils auf einem Kreis mit der Sehne $\overline{AB}$.
Die Kreise haben die Eigenschaft, dass eine Achsensymmetrie bzgl. der Mittelsenkrechten, auf der sich der 3. Weg befindet, vorliegt.

Zu b):
Abstraktion der Vorderfront des Schlosses durch eine Strecke $\overline{AB}$ mit den Endpunkten A, B.
Wege sind durch Halbgeraden abstrahiert. Touristenstandorte auf den Wegen sind durch Punkte auf den Halbgeraden angegeben.
Öffnungswinkel α der Kamera ist der Winkel α mit den Touristenstandorten als Scheitel und den Strecken durch den Standort zu den Punkten A und B als Schenkel.
Wenn ein Punkt auf einer Halbgeraden sich von der Strecke $\overline{AB}$ entfernt, so wird der Winkel α kleiner.
Wenn ein Punkt auf einer Halbgeraden sich der Strecke $\overline{AB}$ nähert, dann wird der Winkel α größer.

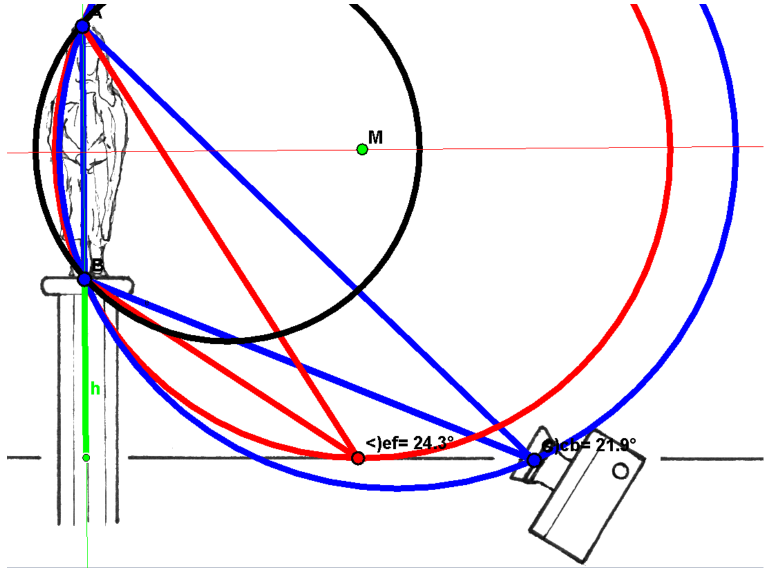
Zu den Aufgaben 2 und 3 in Abschnitt 6:

2. Die Statue wird durch eine Strecke $\overline{AB}$ abstrahiert. Die Mittelpunkte der Fasskreise zu $\overline{AB}$ liegen auf der Mittelsenkrechten m_{AB} (dünne rote Gerade im Bild unten).

   Einerseits gilt, je größer der Radius des Fasskreises ist, umso weiter ist der Mittelpunkt von der Strecke $\overline{AB}$ entfernt und umso kleiner ist der Umfangswinkel α. Ist der Winkel α also größtmöglich, so muss der Fasskreisradius möglichst klein sein.

   Andererseits muss der Kreisradius aber so groß sein, dass der Kreis die Horizontale, auf der sich die Kamera bewegt, schneidet. Somit ist die Lage des Fasskreises für den maximal möglichen Winkel α_{max} derart, dass der Kreis die Horizontale berührt. Dies ist im nachfolgenden Bild die rot gezeichnete Situation. Als maximaler Winkel wird $\alpha_{max} \approx 24{,}3°$ abgemessen.
   Bei dem schwarzen Kreis z.B. ist der Umfangswinkel α zwar größer, der Kreis besitzt aber keinen Schnittpunkt mit der Horizontalen und scheidet somit aus.
   Bei dem blauen Kreis z.B. gibt es zwar Schnittpunkte mit der Horizontalen, aber der Umfangswinkel α dort ist jeweils kleiner als $24{,}3°$ und deshalb nicht maximal (im Bild $\alpha \approx 21{,}9°$).

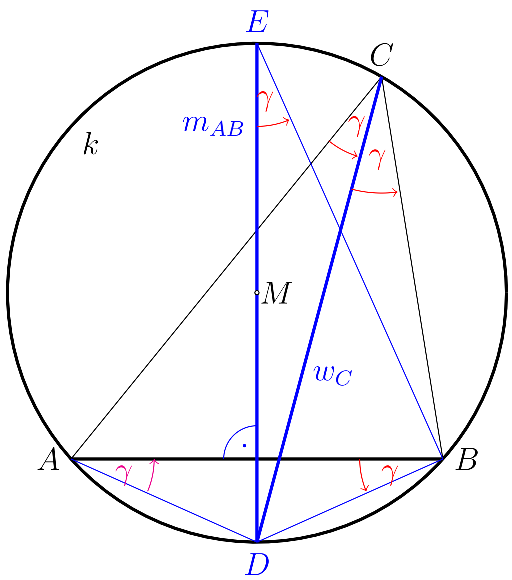
   Somit ist die gesuchte Lage des Kameraobjektivs der rote Punkt auf der Horizontalen und der zugehörige maximal mögliche Öffnungswinkel ist $\alpha_{max} \approx 24{,}3°$.



Der Radius des roten Kreises ist $r = h + \frac{|AB|}{2}$, wobei h die Höhe des Podests bis zur Horizontalen ist. (h ist die Länge der Lotstrecke von B auf die Horizontale.)

Der rote Kreis kann konstruiert werden wie folgt:
Konstruiere die Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$, der Abstand der Mittelsenkrechten zur Horizontalen ist der Kreisradius $r = |MA| = h + \frac{|AB|}{2}$. Zeichne den Kreis um B (oder A) mit Radius r. Dieser Hilfskreis schneidet die Mittelsenkrechte im Kreismittelpunkt M. Der Kreisbogen um M mit demselben Radius r ist der gesuchte Fasskreisbogen.
Die optimale Lage des Kameraobjektivs ist der Lotfußpunkt von M auf die Horizontale, also der Berührpunkt Fasskreisbogen/Horizontale.

3. Der gegebene Winkel γ ist ein Umfangswinkel über der Sehne $\overline{DB}$ bzgl. des Kreises k.
   Der Winkel γ taucht noch an den folgenden Stellen der Figur auf:
   Wenn die Strecke $\overline{DB}$ als Sehne und der Kreis k als Fasskreis aufgefasst wird, so taucht der Winkel γ als Umfangswinkel bei E auf mit den Schenkeln $\overline{ED}$ und $\overline{EB}$, sowie bei C mit dem Schenkeln $\overline{CD}$ und $\overline{CB}$.
   Da das Dreieck mit den Eckpunkten A, D, B ein gleichschenkliges ist, taucht der Winkel γ auch bei B auf mit den Schenkeln $\overline{BA}$ und $\overline{BD}$. Er kann als Umfangswinkel über der Sehne $\overline{AD}$ aufgefasst werden.
   Somit taucht der Winkel γ als Umfangswinkel über der Sehne $\overline{AD}$ auch bei C mit den Schenkeln $\overline{CA}$ und $\overline{CD}$ auf.
   Diese Winkel sind im nachfolgenden Bild in rot eingezeichnet.



Die Gerade CD halbiert also den Innenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ bei C und somit ist $w_C = CD$ die Winkelhalbierende im Dreieck durch den Eckpunkt C. Die Gerade CD schneidet m_{AB} im Punkt D auf dem Umkreis k.