Hochschule
für Technik
Stuttgart

HFT Stuttgart
Fakultät für Vermessung, Informatik und Mathematik
Studiengang Mathematik
Unterrichtsmaterialien zum Schulfach IMP

Der Kehrsatz des Satzes des Pythagoras

Thema im Kontext

Den Schülerinnen und Schüler ist bekannt, was ein Satz ist und sie wissen, dass die Umkehrung eines Satzes nicht unbedingt stimmen, sondern bewiesen werden muss. Dies soll im Folgenden am Beispiel des Satzes des Pythagoras demonstriert werden.

Der Satz des Pythagoras

Satz 1

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten der Längen a und b und der Hypotenuse der Länge c ist der Flächeninhalt des Quadrates der Hypotenuse gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten, als Formel: $a^2 + b^2 = c^2$.

In diesem Satz ist

- die Voraussetzung: Ein rechtwinkliges Dreieck ist gegeben, wobei a und b die Längen der Katheten sind und c ist die Länge der Hypotenuse.
- die Behauptung: In diesem Dreieck gilt die Formel $a^2 + b^2 = c^2$.

Vertauscht man Voraussetzung und Behauptung, so ergibt sich:

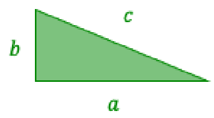
Der Kehrsatz des Satzes des Pythagoras

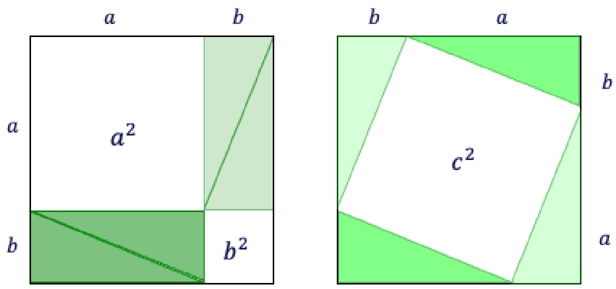
Satz 2

Wenn für die Seitenlängen a , b und c eines Dreiecks $\triangle ABC$ die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist, so ist dieses Dreieck rechtwinklig, und c ist die Länge seiner Hypotenuse.

Dieser Kehrsatz besagt, dass der Zusammenhang $a^2 + b^2 = c^2$ zwischen den Seitenlängen a, b und c nur in rechtwinkligen Dreiecken besteht.

Zum Satz des Pythagoras gibt es viele Beweise. Der folgende ist besonders anschaulich und bedarf keiner zusätzlichen Erklärungen:



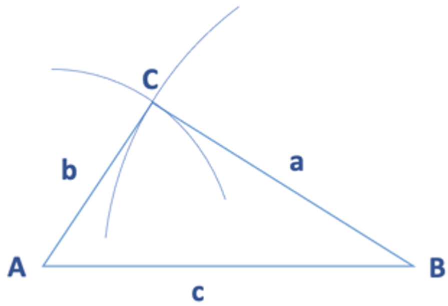


Ganz praktisch kann man sich vorstellen, zwei identische quadratische Kuchen mit der jeweiligen Seitenlänge $(a + b)$ vor sich zu haben. Aus jedem Kuchen werden entsprechend der Abbildung jeweils vier identische dreieckige Kuchenstücke herausgeschnitten. Der verbleibende Rest sieht zwar im linken Kuchen anders aus als im rechten, die Reste beider Kuchen sind aber gleich groß.
Der Kehrsatz des Satzes des Pythagoras muss separat bewiesen werden, beispielsweise in der folgenden Form.

Beweis des Kehrsatzes

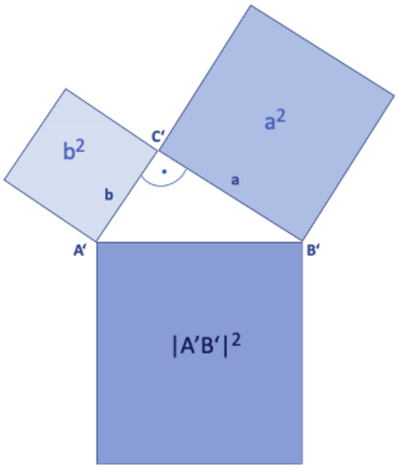
1. Schritt: Das Dreieck $\triangle ABC$

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen a, b und c, die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.



Gemäß dem Kongruenzsatz SSS kann das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen a, b und c eindeutig konstruiert werden.

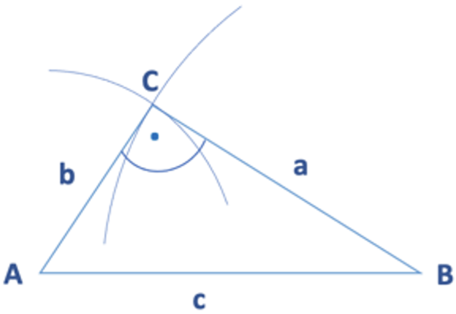
2. Schritt: Ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle A'B'C'$



Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle A'B'C'$ mit dem rechten Winkel bei C' und den Katheten mit den Längen a und b: Für die beiden Katheten $[A'C']$ und $[B'C']$ gilt: $|A'C'| = b$ und $|B'C'| = a$.
Der Satz des Pythagoras kann auf das Dreieck $\triangle A'B'C'$ angewendet werden. Deshalb gilt für dessen Hypotenuse:
$|A'B'|^2 = |A'C'|^2 + |B'C'|^2$,
also $|A'B'|^2 = a^2 + b^2$.

3. Schritt: Vergleich der beiden Dreiecke

Aus $|A'B'|^2 = a^2 + b^2$ folgt mit der Voraussetzung $c^2 = a^2 + b^2$ aus Schritt 1: $|A'B'|^2 = c^2$. Das ist nur für $|A'B'| = c$ möglich. Damit stimmen Dreieck $\triangle A'B'C'$ und Dreieck $\triangle ABC$ in allen drei Seiten überein. Sie sind demnach kongruent nach dem Kongruenzsatz SSS. Daraus folgt, dass auch **Dreieck $\triangle$ABC rechtwinklig ist mit [AB] als Hypotenuse.**



In die Konstruktionszeichnung des Dreiecks $\triangle ABC$ aus dem ersten Schritt kann nun der rechte Winkel eingezeichnet werden.

Ist ein beliebiges Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gegeben, so lässt sich also anhand seiner Seitenlängen herausfinden, ob dieses Dreieck rechtwinklig ist.

Pythagoräische Zahlentripel

Definition 1

Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Längen aller drei Seiten nennt man *pythagoräische Dreiecke*.
Die Zahlenwerte der Seitenlängen solcher Dreiecke werden als *pythagoräische Zahlentripel* bezeichnet. Sind diese Zahlenwerte teilerfremd, so spricht man von einem *primitiven* pythagoräischen Zahlentripel.

Beispiel

Ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$ ist rechtwinklig, denn der Satz des Pythagoras gilt: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Die Seitenlängen bilden das pythagoräische Zahlentripel 3, 4 und 5. Es ist primitiv, da die Zahlen 3, 4 und 5 teilerfremd sind. Ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 9$, $b = 12$ und $c = 15$ ist ebenfalls rechtwinklig, denn es gilt auch hier der Satz des Pythagoras: $9^2 + 12^2 = 15^2$. Die Seitenlängen bilden das pythagoräische Zahlentripel 9, 12 und 15. Diese drei Zahlen haben den gemeinsamen Teiler von 3, das Tripel ist also nicht primitiv. Man kann hier den Satz des Pythagoras also auch in der Form schreiben: $(3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2 = (3 \cdot 5)^2$.

Allgemein lassen sich aus einem pythagoräischen Zahlentripel beliebig viele weitere pythagoräischen Zahlentripel bilden:

Satz 3

Werden alle drei Zahlen eines pythagoräischen Zahlentripels mit derselben (beliebigen) natürlichen Zahl n multipliziert, so entsteht wieder ein pythagoräisches Zahlentripel, denn es gilt:
$(n \cdot a)^2 + (n \cdot b)^2 = (n \cdot c)^2$.

Historische Anmerkung

Der Kehrsatz findet beispielsweise bei großen Flächen im Gelände eine praktische Anwendung, da sich Abstände leichter und genauer messen lassen als Winkel. Schon in der Zeit um 2300 v. Chr. konnten im alten Ägypten die sogenannten

Harpedonapten (Seilspanner) rechtwinklige Dreiecke mit einem Seil herstellen. Sie nahmen dazu Seile. Diese waren mit Hilfe von Knoten in zwölf jeweils gleich lange Abschnitte geteilt. Mit einem solchen Seil wurde ein Dreieck gespannt, das die Seitenlängen von drei, vier und fünf Seilabschnitten besaß. Da $3^2 + 4^2 = 5^2$ gilt, ist ein solches Dreieck ist rechtwinklig. Damals wurde zweimal pro Jahr der Nil überschwemmt. Mit Hilfe solcher pythagoräischer Dreiecke war man in der Lage, die Ländereien wieder rechtwinklig abzustecken.

Literatur

[1] Walz, G., *Lexikon der Mathematik: Band 4, Moo bis Sch*, 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg 2002, DOI 10.1007/978-3-662-53500-4
[2] https://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/pythagoras /site31.html [13.02.2022]
[3] Maresch, G., Promberger, J. (2017). Die mehr als 400 Beweise des Satzes von Pythagoras–eine mathematisch-geometrische Schatzkiste für alle Schulstufen. *Informationsblätter der Geometrie*, 2017, 16-20.

Übungsblatt zum Kehrsatz des Satzes des Pythagoras

Aufgabe 1

Versuche, den Beweis in den drei Schritten nachzuvollziehen.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen a, b und c. Prüfe rechnerisch, ob das Dreieck rechtwinklig ist für folgende Zahlenwerte:

a) $a = 5, b = 8, c = 10$.

b) $a = 17, b = 15, c = 8$.

c) $a = 5, b = 13, c = 12$.

Konstruiere die drei Dreiecke.

Aufgabe 3

Drei natürliche Zahlen a, b und c, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man ein pythagoräisches Tripel. Ein Beispiel dafür sind die Zahlen 3, 4 und 5. Suche im Internet weitere pythagoräische Tripel.

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen $a = 6, b = 8$ und $c = 10$.

a) Prüfe rechnerisch, ob dieses Dreieck rechtwinklig ist.

b) Konstruiere das Dreieck.

c) Berechne das zugehörige primitive pythagoräische Zahlentripel.

d) Konstruiere auch das Dreieck $\triangle A'B'C'$ mit den Seitenlängen des primitiven pythagoräischen Zahlentripels. Was fällt dir auf?

e) Wie kann man mit diesem primitiven pythagoräischen Zahlentripel auf einfache Weise weitere pythagoräische Zahlentripel finden? Welche Gemeinsamkeiten haben die jeweils dazugehörigen Dreiecke?

Aufgabe 5

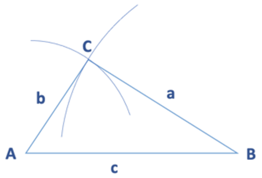
Versuche, ein Seil so zu präparieren, wie es die Harpedonapten im alten Ägypten zur Erstellung eines rechtwinkligen Dreieckes verwendeten.

Lösungen zum Kehrsatz des Satzes des Pythagoras

Aufgabe 2

a) falsch, b) wahr, c) wahr

Eine Konstruktion ist mit dem Kongruenzsatz SSS möglich.



Aufgabe 4

a) $6^2 + 8^2 = 10^2$: Das ist wahr. Das Dreieck $\triangle ABC$ ist somit rechtwinklig und die Seitenlängen bilden das pythagoräische Zahlenripel 6, 8 und 10.

b) Eine Konstruktion ist mit dem Kongruenzsatz SSS möglich.

c) Die drei Zahlen 6, 8 und 10 haben den gemeinsamen Teiler von 2. Man kann hier den Satz des Pythagoras also auch in der Form schreiben: $(2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 = (2 \cdot 5)^2$. Die Zahlen 3, 4 und 5 sind teilerfremd und bilden das zugehörige primitive pythagoräische Tripel.

d) Die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind ähnliche Dreiecke: Sie unterscheiden sich zwar in der Größe, besitzen aber jeweils gleiche Winkel.

e) Aus dem ersten Dreieck $\triangle ABC$ lassen sich weitere ähnliche Dreiecke mit pythagoräischen Zahlentripeln finden, indem man alle Seitenlängen mit einer natürlichen Zahl n multipliziert. Für ein solches Dreieck gilt ebenfalls der Satz des Pythagoras:

$$(n \cdot 3)^2 + (n \cdot 4)^2 = (n \cdot 5)^2.$$